HAL
open science

Aggregation of expert opinions and uncertainty theories

Sébastien Destercke, Didier Dubois, Eric Chojnacki

To cite this version:

Sébastien Destercke, Didier Dubois, Eric Chojnacki. Aggregation of expert opinions and uncertainty theories. Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications, 2006, Toulouse, France. pp.295-302. irsn-00196474

HAL Id: irsn-00196474

https://irsn.hal.science/irsn-00196474

Submitted on 12 Dec 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Preprint of the paper presented at the LFA 2006 conference

Fusion d'opinions d'experts et théories de l'incertain

Aggregation of expert opinions and uncertainty theories

Sebastien Destercke[1,2] Didier Dubois[1] Eric Chojnacki[2]
[1] Institut de Recherche en Informatique de Toulouse
[2] Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire, DPAM, SEMIC, LIMSI

Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne 31062 Toulouse Cedex 9, France. desterck,dubois@irit.fr
CE Cadarache, 13115 Saint Paul Lez Durance Cedex, France. sebastien.destercke,eric.chojnacki@irsn.fr

Résumé :
Le problème de la représentation et de la fusion d'opinions d'experts a longtemps été considéré du seul point de vue des probabilités classiques. Cependant, ces dernières années ont vu naître bon nombre de propositions dans le cadre des diverses théories de l'incertain (Théorie des possibilités, fonctions de croyance, probabilités imprécises). Cet article place le problème de la fusion d'opinions d'experts dans un cadre unificateur et explore la façon dont les différentes théories s'articulent autour de ce cadre. Il souligne ensuite les divergences entre les formalismes et les problèmes que cela pose, notamment en terme d'unification.

Mots-clés :
Opinions d'experts, fusion, théorie des possibilités, fonctions de croyance, probabilités imprécises

Abstract:
The problem of expert opinions representation and aggregation has long been adressed in the only framework of probability theory. Nevertheless, recent years have witnessed many proposals in other uncertainty theories (possibility theory, evidence theory, imprecise probabilities). This paper casts the problem of aggregating expert opinions in a common underlying framework and shows how uncertainty theories fit into this framework. Differences between theories are then emphasized and discussed.

Keywords:
Expert opinions, fusion, possibility theory, belief functions, imprecise probabilities

1 Introduction

Lorsqu'il faut évaluer des paramètres de modèles scientifiques qui sont mal connus faute de données, il est souvent fait appel à des experts. Ces experts fournissent des opinions sur les paramètres. Une fois obtenues, ces opinions doivent être formalisées conformément à une théorie mathématique puis synthétisées par une méthode de fusion. Lorsque ces opinions sont conflictuelles, pondérer les experts (i.e. évaluer leur qualité) permet plus de souplesse dans la gestion de ce conflit.

Usuellement, ces opérations sont réalisées dans un cadre probabiliste (voir [5, 4]). L'approche probabiliste, même si elle a prouvé sa valeur pratique, est mal adaptée à la représentation de l'imprécision des opinions d'experts et limite le choix des méthodes de fusion (Voir [13] pour une critique et une alternative possibiliste). Les théories de l'incertain permettent de représenter plus fidèlement cette imprécision et autorisent de très nombreuses méthodes de fusion. Ces dernières années ont vu naître bon nombre de propositions éparses au sein de ces théories. Le but de cet article est de poser et d'étudier le problème de la fusion d'opinions d'experts dans une perspective commune à toutes les théories.

Dans la suite, nous considérons que k experts e_i donnent leurs opinions concernant la valeur d'un paramètre v sur un domaine X. Nous considérons que ces opinions ont déjà été obtenues et formalisées, aussi nous nous concentrons sur les problèmes de la pondération des experts et de la fusion de leurs opinions. Nous nommons modélisateur un agent extérieur (un être humain, un système expert, un programme informatique, ...) chargé de fusionner, de synthétiser les opinions en un tout cohérent.

Dans la section 2, nous rappelons brièvement les formalismes de représentation utilisés ici (possibilités, fonctions de croyance, familles convexes de probabilités) ainsi que les relations qui existent entre elles. La section 3 pose le problème de la pondération des experts et montre qu'un même type de mesure peut être utilisé pour l'ensemble des théories. La section 4 traite ensuite du problème de la fusion des opinions et rappelle les principales méthodes de fusion proposées pour chaque théorie. Enfin, la section 5 souligne les divergences entre théories et discute le besoin d'un cadre unifié de fusion des opinions d'experts.

2 Représentation des opinions

Selon la forme de l'opinion exprimée par un expert i, cette dernière peut être formalisée de différentes façons.

Une distribution de possibilité $\pi_i(x)$ correspond à une opinion exprimée sous forme d'un ensemble d'intervalles de confiance $A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq X$ dont les degrés de confiance (i.e. les degrés de nécessité) valent respectivement $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$.

Une fonction de croyance Bel_i peut formaliser une opinion donnée sous forme de quantiles (précis ou imprécis). Si l'opinion est exprimée sous forme d'intervalles de confiance, la distribution de possibilité correspondante peut être formalisée par une série d'ensembles focaux emboîtés t.q. $m(A_i) = \lambda_{i+1} - \lambda_i$.

Une famille convexe $\mathcal{P}_i$ de probabilités correspond à une opinion exprimée sous forme d'un ensemble de probabilités extrêmes (qui correspondent alors aux sommets d'un polyhèdre) ou sous forme de contraintes linéaires portant sur les probabilités. Les opinions peuvent également correspondre à un ensemble de probabilités inférieures $\underline{P}(A)$ et supérieures $\overline{P}(A)$ t.q. $\underline{P}(A) = \inf_{P \in \mathcal{P}} P(A)$ et $\overline{P}(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A)$ (Notons que la représentation par probabilités inférieures et supérieures est moins générale que les deux précédentes). Distributions de possibilité et fonctions de croyance sont ici interprétée comme des familles particulières de probabilités (il existe d'autres interprétations) . Respectivement $\mathcal{P}_\pi = \{P | N(A) \leq P(A) \leq \Pi(A) \forall A \in X\}$ et $\mathcal{P}_{Bel} = \{P | Bel(A) \leq P(A) \leq Pl(A) \forall A \in X\}$.

3 Pondération des experts

Lorsque les opinions des experts sont en conflit, posséder une évaluation de leur qualité permet au modélisateur d'avoir plus de flexibilité pour fusionner les opinions. Dans le cas de paramètres de modèles scientifiques, la méthode la plus rationnelle consiste à pondérer l'expert en fonction de performances passées. L'expert évalue une série de paramètres témoins, dont les valeurs réelles sont inconnues des experts et (prochainement) connues du modélisateur. Dans cette optique, Cooke [5] a développé, pour les probabilités, une théorie des poids dont les principes peuvent être repris pour les autres théories. Ces principes, qui nous semblent légitimes, sont les suivants :

- Récompenser les experts à la fois précis et bien calibrés (i.e. dont l'opinion est proche de la réalité connue)
- Pertinence : le calcul des poids ne doit s'appuyer que sur les observations
- Justesse : la mesure de calibration doit être maximum si l'expert est parfaitement calibré
- Significativité : les poids doivent être intrinsèquement comparables

Dans sa théorie, Cooke utilise une approche fréquentiste pour mesurer la précision et la calibration de l'expert. Si p est la distribution de probabilité discrète correspondant à l'opinion de l'expert, et r la distribution "idéale" induite des observations, alors la calibration de l'expert est mesurée par l'entropie relative $I(r,p) = \sum_{i=1}^{B} r_i \cdot \ln(r_i/p_i)$ avec B le nombre d'éléments du domaine. $I(r,p)$ peut s'interpréter comme une mesure de la surprise d'apprendre r alors que p est supposée correcte (voir [5] pour les détails). La précision de l'ex-

pert est mesurée par l'entropie $I(r, u)$ où u est la distribution uniforme (i.e. non informative). Sandri et co. [13] montrent que cette approche peut être mise en défaut, en particulier dans le cas de paramètres témoins déterministes. Cette imperfection provient principalement du fait que la méthode de Cooke considère des valeurs déterministes ou imprécises comme autant "d'observations" d'un processus aléatoire (hypothèse nécessaire dans le cadre probabiliste et fréquentiel). L'approche ensembliste [13, 10] permet de se dégager de cette hypothèse tout en conservant l'idée de mesurer la cohérence de l'opinion donnée par l'expert avec les données disponibles.

Nous appelons ici indice de spécificité (Sp) la mesure de précision de l'expert et notons (IC) la mesure de calibration. Les mesures présentées ici sont générales et peuvent être utilisées pour toutes les théories de l'incertain.

3.1 Indice de spécificité (Sp)

Soit un sous-ensemble A de valeurs possibles d'un paramètre : plus sa cardinalité (attachée ou non à une métrique) $|A|$ est grande, plus il sera imprécis. Toute fonction $f(|A|)$ croissante peut donc servir de mesure d'imprécision de A. Pour toutes les représentations étudiées ici, il est possible d'attacher des poids m_i aux ensembles A t.q. $\sum_{A \in X} m_i(A) = 1$ en utilisant l'inverse de Möbius de la probabilité inférieure. A partir de ces résultats, il est possible de produire une formule générale d'imprécision (ou de non spécificité) t.q.

$$IP = \sum_{A \in X} m_i(A) f(|A|) \tag{1}$$

En prenant $f(|A|) = |A|$, on retrouve la cardinalité discrète d'un ensemble flou pour les distributions de possibilité et la cardinalité moyenne pour les fonctions de croyance. Pour les familles convexes de probabilités, les poids m_i calculés peuvent être négatifs, mais la mesure donnée par l'équation (1) reste adéquate (voir [1]). Notons également que dans le cas où possiblités et fonctions de croyance sont assimilées à des familles de probabilités, d'autres mesures permettent de prendre en compte à la fois l'imprécision et la variabilité des familles concernées (voir [2]).

L'imprécision de l'opinion étant calculée, l'indice de spécificité peut se calculer simplement comme

$$Sp = \frac{\max(IP) - \sum_{A \in X} m_i(A) f(|A|)}{\max(IP)} \tag{2}$$

où $\max(IP)$ est la valeur maximale qui peut être atteinte par l'équation (1). L'équation (2) vaut bien 0 dans le cas de l'ignorance totale et est maximum lorsque l'imprécision est minimum.

3.2 Indice de Calibration (IC)

Soit un paramètre témoin v^* dont la valeur est inconnue de l'expert et connue du modélisateur. L'indice de calibration mesure l'adéquation de l'opinion de l'expert avec les données observées. Nous différencions ici le cas où le paramètre est déterministe et connu (v^* est une valeur unique) du cas où le paramètre témoin est lui-même connu de manière incertaine.

Paramètre de valeur déterministe connue. Dans ce cas, l'expert est d'autant mieux calibré qu'il considère la valeur v^* comme plausible. Cela correspond à prendre la possiblité $\pi_i(v^*)$, la plausibilité $Pl(v^*)$ ou la probabilité supérieure $\overline{P}(v^*)$ comme indice de calibration, selon le formalisme qui modèlise l'opinion de l'expert.

Paramètre connu de manière incertaine. Dans le cas où l'opinion et le paramètre témoin sont tous deux formalisés par des représentations ensemblistes (respectivement, $K_i(v)$ et $K(v^*)$), un expert sera bien calibré si la connaissance $K(v^*)$ sur le paramètre est incluse dans son opinion $K_i(v)$. En reprenant l'équation (1), cet indice de calibration peut se calculer de la manière suivante

$$IC = \frac{IP(K_i(v) \cap K(v^*))}{IP(K(v^*))} \tag{3}$$

avec $IP(K_i(v) \cap K(v^*)) = 0$ si $K_i(v) \cap K(v^*) = \emptyset$.

L'indice suivant (de type indice de Jacquard)

$$IC = \frac{IP(K_i(v) \cap K(v^*))}{IP(K_i(v) \cup K(v^*))} \quad (4)$$

pénalise à la fois la sous-confiance et la surconfiance de l'expert. Adjoint à un indice de spécificité, il peut être très pénalisant, puisque la sous-confiance est punie deux fois.

Pour assurer un score maximum à l'expert parfaitement calibré, les opérations conjonctives et disjonctives des indices (3) et (4) doivent être choisies avec soin. Par exemple, dans le cadre des fonctions de croyance, la règle bien connue de Dempster est inadéquate pour mesurer la calibration.

Pour la théorie des possibilités, d'autres mesures de calibration sont proposées dans [13]. De plus, pour les fonctions de croyance et les probabilités imprécises, la notion d'inclusion possède plusieurs variantes (voir [9]).

Cette approche est différente d'approches basées sur une notion de distance [11], et pourrait être comparée à ces dernières.

En s'inspirant de la méthode de Cooke, un indice combinant calibration et informativité peut ensuite être calculé afin d'obtenir un seul poids :

$$Q = C_\alpha \cdot Sp \cdot IC \quad (5)$$

avec $C_\alpha = 1$ si $IC < \alpha$, 0 autrement. le facteur C_α permet de s'assurer que des experts trop mal calibrés ne seront pas pris en compte. Si m paramètres témoins v_j sont utilisés, alors une moyenne arithmétique des indices Q_j peut servir d'indice global pour un expert.

3.3 Utilisation des poids

Une fois les poids obtenus, ces derniers peuvent être utilisés de diverses manières pour résoudre le conflit :

Moyenne pondérée. Les poids sont utilisés dans une moyenne. Ils sont alors assimilables à un nombre d'observations produites par des sources identiques et indépendantes (l'expert jouant le rôle de la source, et son opinion celui de l'observation).

Affaiblissement. Les poids sont considérés comme des fiabilités utilisées pour rendre les opinions des experts plus imprécises. Soit α la fiabilité de l'expert i. Pour la théorie des possibilités, l'affaiblissement de la distribution π_i en π_i^α correspond à l'opération

$$\pi_i^\alpha = \max(\pi_i, 1 - \alpha)$$

Pour les fonctions de croyance, l'affaiblissement de Bel_i en Bel_i^α correspond à

$$Bel_i^\alpha(A) = \alpha Bel_i(A) \; \forall A \in X, A \neq X$$
$$Bel_i^\alpha(X) = Bel_i(X)$$

Une formule équivalente a été proposée par Yager dans le cadre des possibilités. Elle correspond à

$$\pi_i^\alpha = \alpha * \pi_i + 1 - \alpha$$

avec $*$ un opérateur de conjonction (la formule est équivalente à celle des fonctions de croyances lorsque $*$ est le produit). Pour les familles convexes de probabilités, Moral et Sagrado [12] ont proposé un ensemble de procédés d'affaiblissement selon la nature des poids. Une fois les opinions affaiblies, elles sont considérées comme également fiables. Procéder à un affaiblissement dans le cadre des opinions d'experts doit se faire avec précaution : il est en effet dangereux de prendre les poids calculés tel quel pour affaiblir les opinions, puisqu'ils sont très rarement proches de 1 (le risque de perdre une partie importante de l'information n'est pas négligeable). De plus, ces poids peuvent varier selon le formalisme et la méthode de pondération choisie.

Ordonnancement. Les poids calculés induisent un ordre (souvent complet) entre les experts. Cet ordre peut ensuite être utilisé pour ne considérer qu'un sous-groupe d'opinions, ou

encore pour appliquer des méthodes qui tirent parti de cet ordre (voir la section 4).

Soulignons également que le recours aux théories de l'incertain permet d'étendre de manière significative le choix des paramètres témoins. En particulier, dans le cas d'échantillons statistique pauvres, des méthodes récentes permettent d'obtenir des approximations de distributions de possibilité ou de fonctions de croyance (voir [7]).

4 Fusion des opinions

La but de la fusion des opinions est de synthétiser l'information qu'elles contiennent de manière cohérente. Contrairement à la théorie des probabilités, les théories de l'incertain permettent d'utiliser de nombreuses méthodes de fusion, en particulier des méthodes ensemblistes (ce qui est impossible si le modélisateur doit rester à l'intérieur de la théorie classique des probabilités). Nous rappelons les différents comportements des méthodes de fusion qui peuvent se retrouver dans l'ensemble des théories de l'incertain. Soit deux opinions d'experts $e_1(v) = A$ et $e_2(v) = B$ avec $A, B \subseteq X$, et $*$ un opérateur de fusion. Les méthodes de fusion peuvent être caractérisées par l'un des trois comportements suivants :

- Comportement conjonctif : $e_1(v) * e_2(v) \subseteq A \cap B$. Le résultat est très précis et correspond au cas où les opinions ne sont pas en conflit.
- Comportement disjonctif : $e_1(v) * e_2(v) \supseteq A \cup B$. La disjonction correspond au cas où le modélisateur ne veut ou ne peut pas faire de choix entre les experts et où les opinions de ceux-ci sont en conflit (l'un d'entre-eux est supposé fiable, sans savoir lequel). Le résultat est généralement très imprécis, mais toutes les opinions sont prises en compte.
- Comportement de comptage : le résultat correspond à une vision statistique des opinions. Ces dernières sont considérées comme autant d'observations provenant de sources identiques et indépendantes.

En pratique, il est souhaitable que la méthode de fusion s'adapte au contexte. La précision et la nature du résultat de la fusion dépendent alors de la présence de conflit et de la connaissance disponible sur la qualité des experts. Les méthodes ayant un comportement adaptatif peuvent être de nature très variées.

Nous allons maintenant rappeler les formules les plus couramment utilisées au sein de chaque théorie correspondant à chacun de ces comportements. Selon le cas, les opinions des k experts sont modélisées sous la forme de distributions π_i de possibilité, de fonctions de croyance m_i ou de familles convexes $\mathcal{P}_i$ de probabilités.

4.1 Méthodes conjonctives

Pour les distributions de possibilité, les fonctions de croyance et les familles de probabilités, les méthodes conjonctives s'écrivent respectivement

$$\pi_\cap(x) = \top_{i=1,\ldots,k} \ \pi_i(x) \tag{6}$$

$$m_\cap(A) = \sum_{A_1 \cap \ldots \cap A_k = A} m(A_1) \ldots m(A_n) \tag{7}$$

$$\mathcal{P}_\cap = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i \tag{8}$$

où $\top$ est une t-norme quelconque, les plus couramment utilisées étant le $\min$ (cas de dépendance) et le produit (cas d'indépendance).

4.2 Méthodes disjonctives

Les méthodes disjonctives s'écrivent respectivement

$$\pi_\cup(x) = \perp_{i=1,\ldots,k} \ \pi_i(x) \tag{9}$$

$$m_\cup(A) = \sum_{A_1 \cup \ldots \cup A_k = A} m(A_1) \ldots m(A_n) \tag{10}$$

$$\mathcal{P}_\cup = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i \tag{11}$$

où $\perp$ est une t-conorme quelconque.

Rappelons que pour les probabilités imprécises, le résultat n'est plus forcément une famille convexe de probabilités. Une alternative

consiste à prendre l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}_\cup$, ce qui rend le résultat plus imprécis mais permet de conserver les avantages de la convexité.

4.3 Méthodes de comptage

Les méthodes de comptage s'écrivent respectivement

$$\pi_{Moy}(x) = \sum_{i=1,\ldots,k} w_i \pi_i(x) \quad (12)$$

$$m_{Moy}(A) = \sum_{i=1,\ldots,k} w_i m(A) \quad (13)$$

$$\mathcal{P}_{Moy} = \sum_{i=1,\ldots,k} w_i \mathcal{P}_i \quad (14)$$

avec $\sum_{i=1,\ldots,k} w_i = 1$. Si les experts ne sont pas pondérés, utiliser une méthode de comptage revient à considérer qu'ils sont équipondérés. Cette méthode est également la seule utilisée dans la théorie des probabilités, en dehors des méthodes bayesiennes

4.4 Méthodes adaptatives

Pour chaque théorie, de très nombreuses propositions de méthodes adaptatives ont été faites pour résoudre le problème du conflit. Pour des aperçus assez complets, nous renvoyons le lecteur à [10] pour la théorie des possibilités, à [14] pour les fonctions de croyance et à [15] pour les probabilités imprécises. Cependant, deux types de méthodes, séduisantes de par leur principe, peuvent s'appliquer à toutes les théories :

Sous-ensembles maximaux cohérents. Cette méthode consiste à utiliser une méthode conjonctive sur les sous-ensembles maximaux d'opinions non-conflictuelles. Une méthode disjonctive est ensuite appliquée aux opinions résultant de ces conjonctions. Soit K_i les ensembles fournis par les opinions d'experts et $\mathcal{E}_j$ $j = 1, \ldots, p$ les sous-ensembles d'opinions maximaux pour lesquels la conjonction est non vide (i.e. $\bigcap_{K_i \in \mathcal{E}_|} K_i \neq \emptyset$). La méthode s'écrit alors

$$K^* = \bigcup_{j=1,\ldots,p} \bigcap_{K_i \in \mathcal{E}_|} K_i$$

on retrouve bien la conjonction en cas d'absence de conflit et la disjonction si les opinions sont conflictuelles 2 à 2. Si le modélisateur peut évaluer le nombre de sources fiables (en se basant, par exemple, sur la pondération), il est possible de fixer la cardinalité des sous-ensembles E_j.

Raffinement hiérarchique. Les experts sont ordonnés et groupés de façon cohérente. L'opinion synthétisée (au moyen d'un des opérateurs précédents) du premier groupe est ensuite raffinée par les opinions des groupes successifs tant que ces dernières ne rentrent pas en conflit avec lui.

4.5 Approche Bayesienne

Au sein des probabilités, de nombreux auteurs ont proposés une approche bayesienne pour résoudre le problème de la fusion d'opinions d'expert. L'approche bayesienne considère les opinions des experts comme des informations nouvelles utilisées pour réviser une probabilité à priori (donnée par le modélisateur). Ce n'est donc pas une "fusion" à proprement parler. Dans le cas où les experts sont supposés indépendants, la formule de Bayes revient à multiplier les opinions par la probabilité a priori (elle se rapproche alors d'une méthode au comportement conjonctif). L'approche Bayesienne est criticable à plus d'un titre (voir [13]). En particulier, la supposition que le modélisateur puisse fournir une probabilité a priori est très forte : ou elle implique l'introduction implicite d'hypothèses non vérifiées, ou elle indique que les experts ne sont pas absolument nécessaires (puisque l'information disponible sur le paramètre est assez riche pour construire une probabilité a priori).

La révision d'une information existante et ses relations avec le théorème de Bayes ont été étudiées dans toutes les théories de l'incertain (voir [8]). L'approche bayesienne est donc transposable aux théories de l'incertain, avec l'avantage que l'information a priori peut être

Tableau 1 – Resultats de la conjonction

	$m([4,5])$	$m([\emptyset])$
Possibilités (eq. (6))	0.6	0.4
Croyance (eq. (7))	0.36	0.54
Prob. Impr. (eq. (8))	0	1

imprécise (voir [6] pour une adaptation dans le domaine des probabilités imprécises).

5 Divergences entre théories

Dans les sections précédentes, nous nous sommes attachés à montrer les similitudes existant entre les diverses théories de l'incertain dans leur traitement de la fusion d'opinions d'experts. Cependant, si le point de vue conceptuel est similaire, les résultats peuvent être très différents selon le formalisme adopté. Un exemple très simple nous permettra de nous en rendre compte. Soit deux experts e_1 et e_2, dont les opinions sur v sont donnés sous forme d'intervalles de confiance.

L'opinion de e_1 (e_2) correspond aux avis suivants
- Je suis certain que $v \in [1,5]$ ($[4,9]$)
- Je suis certain à 60 % que $v \in [2,3]$ ($[6,7]$)

Le tableau 1 résume les résultats d'une conjonction selon le formalisme adopté et la formule de conjonction appliquée (les résultats sont donnés en terme d'ensembles aléatoires). Nous voyons que le conflit (i.e. $m(\emptyset)$) augmente en passant du formalisme des possibilités au formalisme des fonctions de croyances, et que l'intersection des deux familles de probabilités donne l'ensemble vide (c'est facile à voir, puisqu'il est impossible d'avoir simultanément $p([2,3]) \geq 0.6$ et $p([6,7]) \geq 0.6$. Si maintenant nous considérons l'opinion de e_2 comme la connaissance que nous avons sur le paramètre et que nous l'utilisons pour pondérer l'expert e_1, l'équation (5) nous donne comme résultat, selon le formalisme choisi $Q(e_1)_{Poss} > Q(e_1)_{Bel} > Q(e_1)_{Prob} = 0$, alors que les informations disponibles sont identiques.

Outre ce petit exemple, rappelons également que le résultat des équations (7) et (8) appliquées à deux distributions de possibilité n'est pas en général une nouvelle distribution de possibilité.

De même, l'application de l'équation (8) à deux fonctions de croyance ne donne pas en général une famille de probabilités représentable par une fonction de croyance (et même lorsque c'est le cas, cette nouvelle fonction de croyance ne correspond à celle obtenue en appliquant l'équation (7), voir [3]). Ces remarques sont également valables pour les autres méthodes de fusion.

Signalons également qu'en terme d'opérateurs de fusion, la théorie des possibilités offre plus de choix que les deux autres : toute t-norme peut servir d'opérateur de conjonction associatif de distributions de possibilité, tandis que les équations (7) et (8) sont les seules opérations associatives possédant une justification axiomatique dans le cadre des fonctions de croyance et des probabilités imprécises. La même constatation peut être faite pour les disjonctions.

En général, informations disponibles et problèmes rencontrés sont souvent de natures variées. Dans ce cas, une certaine diversité de formalismes apparaît comme souhaitable, sinon nécessaire. Cependant, dans le cas d'opinions expertes, cette diversité peut devenir problématique. Si les informations et la volonté de synthétisation sont identiques, les résultats devraient l'être également. Chacun des formalismes et des méthodes étant justifiés, comment choisir l'un plutôt qu'un autre ? Nous avons vu sur un exemple très simple que ces choix pouvaient avoir un impact important sur le résultat final.

6 conclusions

Le traitement des opinions d'experts dans les différentes théories de l'incertain peut se voir sous une perspective commune. Le recours à ces théories permet de modéliser plus

fidèlement l'imprécision contenue dans l'opinion experte et permet plus de souplesse lors de la fusion des opinions. Pour le problème de la pondération d'experts, nous avons proposé un type de mesure basé sur la notion d'inclusion et applicable à l'ensemble des théories.

Les différences entre les formalismes ont ensuite été mises en évidence au moyen d'un exemple simple. Cet exemple a suffit à montrer que la même information, traitée dans un but identique, pouvait aboutir à des résultats significativement différents selon le formalisme choisi. Ces différences sont un argument supplémentaire en faveur d'un cadre unifiant les différentes théories de l'incertain, au moins dans une certaine mesure.

En particulier, l'étude des relations entre les diverses méthodes de fusion et leur interprétation dans les différents formalismes de l'incertain reste en grande partie à réaliser, même s'il existe déjà de nombreux résultats.

Références

[1] J. Abellan and M. Gomez. Measures of divergence on credal sets. *Fuzzy Sets and System*, 157(11), 2006.

[2] J. Abellan and S. Moral. Maximum difference of entropies as a non-specificity measure for credal sets. *I. J. of General Systems*, 34 :201–214, 2005.

[3] A. Chateauneuf. Combination of compatible belief functions and relation of specificity. In *Advances in the Dempster-Shafer theory of evidence*, pages 97–114. John Wiley & Sons, Inc, New York, NY, USA, 1994.

[4] R. Clemen and R. Winkler. Combining probability distributions from experts in risk analysis. *Risk Analysis*, 19(2) :187–203, 1999.

[5] R. Cooke. *Experts in uncertainty*. Oxford University Press, Oxford, UK, 1991.

[6] F. Coolen and M. Newby. Bayesian reliability analysis with imprecise prior probabilities. *Reliability Engineering and System Safety*, pages 75–85, 1994.

[7] T. Denoeux. Constructing belief functions from sample data using multinomial confidence regions. *I. J. of Approximate Reasoning*, 42 :228–252, 2006.

[8] D. Dubois, S. Moral, and H. Prade. Belief change rules in ordinal and numerical uncertainty theories. In *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, volume 3, pages 311–393. Kluwer Academic, 1998.

[9] D. Dubois and H. Prade. A set-theoretic view on belief functions : logical operations and approximations by fuzzy sets. *I. J. of General Systems*, 12 :193–226, 1986.

[10] D. Dubois and H. Prade. Possibility theory in information fusion. In G. D. Riccia, H. Lenz, and R. Kruse, editors, *Data fusion and Perception*, volume CISM Courses and Lectures N 431, pages 53–76. Springer Verlag, Berlin, 2001.

[11] Z. Elouedi, K. Mellouli, and P. Smets. Assessing sensor reliability for multisensor data fusion within the Transferable Belief Model. *IEEE Trans. on Syst., Man and Cybern. B*, 34(1) :782–787, 2004.

[12] S. Moral and J. Sagrado. Aggregation of imprecise probabilities. In B. Bouchon-Meunier, editor, *Aggregation and Fusion of Imperfect Information*, pages 162–188. Physica-Verlag, Heidelberg, 1997.

[13] S. Sandri, D. Dubois, and H. Kalfsbeek. Elicitation, assessment and pooling of expert judgments using possibility theory. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 3(3) :313–335, August 1995.

[14] P. Smets. Analyzing the combination of conflicting belief functions. *Information Fusion*, 8 :387–412, 2006.

[15] M. Troffaes. Generalising the conjunction rule for aggregating conflicting expert opinions. *I. J. of Intelligent Systems*, 21(3) :361–380, March 2006.